MA1 – domácí úkol 5 – 1. část řešení

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ – průběh funkce – zde první čtyři „průběhy", další budou v druhé části „řešení" dú 5.

1) $Df = \{x \in R;\ x^2-1 \neq 0\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$;

f je spojitá funkce v Df;

f je funkce lichá: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x)$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f(x) > 0$ pro $x \in (1,+\infty) \cup (-1,0)$,

$f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$;

2) limity: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = „\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x(1-\frac{1}{x^2})} =$

$$= „\frac{1}{\infty}" = 0$$

$\lim\limits_{x\to 1\pm} \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{0\pm} = \pm\infty$ (z lichosti fce f pak)

$\lim\limits_{x\to -1\pm} \dfrac{x}{x^2-1} = „\dfrac{-1}{0\mp}" = \pm\infty$

3) vyšetření monotonie funkce a extrémů (lokálních, globálních)

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'\cdot(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1 - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$$

$f'(x) < 0$ v Df $\Rightarrow$ f klesá v intervalu $(-\infty,-1)$,
f klesá i v intervalu $(-1,1)$ i
v intervalu $(1,+\infty)$;

f nenabývá lokálních extrémů ($f' < 0$ v Df), ani f nemá globální extrémy (limity jsou „$\pm\infty$")

4) vyšetření „kde" je funkce konvexní, resp. konkávní; inflexní body:

$$f''(x) = -\left(\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)' = -\frac{2x(x^2-1)^{\cancel{2}} - (x^2+1)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= -\frac{2x^3-2x-4x^3-4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

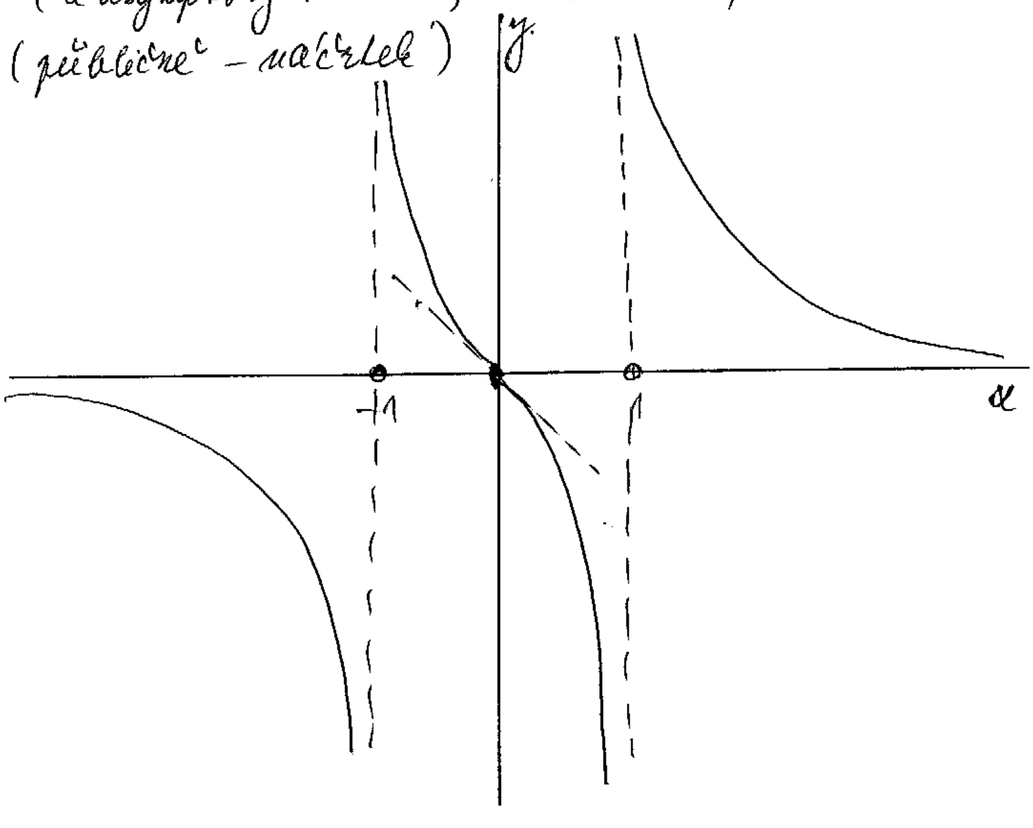
$f''(x)=0 \iff x=0$;

f''	$-$		$+$		$-$		$+$
	$\cap$	-1	$\cup$	0	$\cap$	1	$\cup$

tj: funkce f je
1) konkávní v intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$,
2) konvexní v intervalech $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$,

tedy, v $x=0$ má f inflexi,
$f'(0)=-1$ – směrnice tečny v inflexním bodě $[0,0]$;

5) graf (a asymptoty: $x=1$, $x=-1$ svislé, a osa x vodorovná)
graf (přibližně – náčrtek)



② $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (průběh funkce)

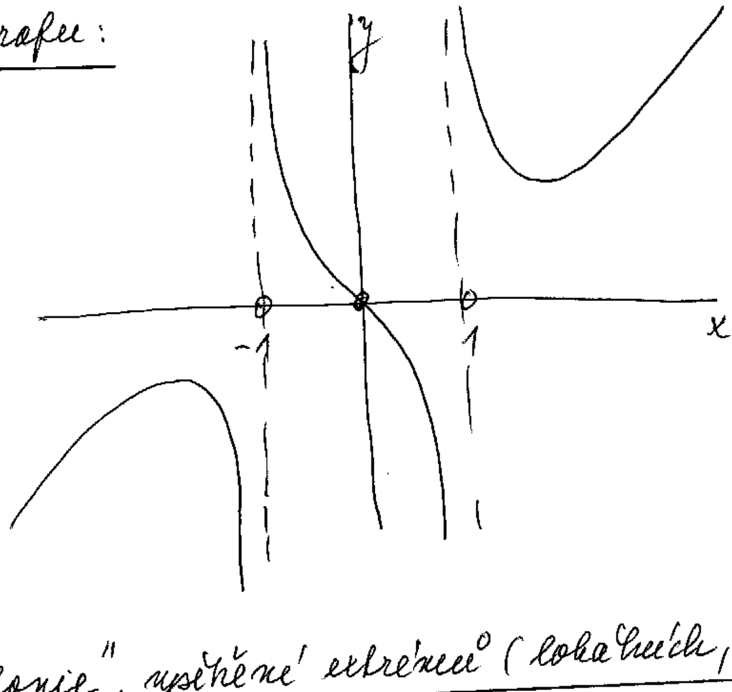
1) $\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \neq 1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$;
f je spojitá v $\mathcal{D}f$, f je lichá;
$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$; $f(x)>0$ v $(-1,0) \cup (1,+\infty)$,
$f(x)<0$ v $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

2) limity:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} \overset{AL}{=} \infty$$

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = „\frac{1}{0\pm}" = \pm\infty, \text{ analog. } \lim_{x\to -1\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = „\frac{-1}{0\mp}" = \pm\infty$$

„odhad" grafu:



3) „monotonie", vyšetření extrémů (lokálních, globálních)

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

$\left(= \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right.$ – „lepší" tvar pro výpočet f'')

f': $+$ | $-\sqrt{3}$ | $-$ | -1 (o) | $-$ | 0 | $-$ | 1 | $-$ | $\sqrt{3}$ | $+$ tj.

$\nearrow$ $-\sqrt{3}$ $\searrow$ -1 $\searrow$ 0 $\searrow$ 1 $\searrow$ $\sqrt{3}$ $\nearrow$

podrobně: $f'(x)>0$ v $(-\infty,-\sqrt{3})$ $\Rightarrow$ f roste v $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$
(f je spojitá v $x=-\sqrt{3}$)

$f'(x)<0$ v $(-\sqrt{3},-1)$ $\rightarrow$ f klesá v $\langle-\sqrt{3},-1)$

$f'(x)<0$ v $(-1,0)$ i v $(0,1)$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ f klesá v $(-1,1)$

a f je spojitá v $x=0$

$f'(x)<0$ v $(1,\sqrt{3})$ $\Rightarrow$ f klesá v $(1,\sqrt{3}\rangle$

$f'(x)>0$ v $(\sqrt{3},+\infty)$ $\Rightarrow$ f roste v $\langle\sqrt{3},+\infty)$.

a odtud: v bodě $x=-\sqrt{3}$ má f ostré lokální maximum $\left(f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, v bodě $x=\sqrt{3}$ má f ostré lokální minimum $\left(f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, globálních extrémů funkce nenabývá, neboť limity pro $x\to\pm\infty$ jsou $\pm\infty$.

4) <u>vyšetření konkávnosti, konvexnosti, inflexních bodů</u>

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (x^4-3x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{2x\left[(2x^2-3)(x^2-1) - 2x^4+6x^2\right]}{(x^2-1)^3} = \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

f'': $-$ | -1 (o) | $+$ | 0 | $-$ | 1 (o) | $+$

$\cap$ -1 $\cup$ 0 $\cap$ 1 $\cup$

tedy, funkce f je konkávní v intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$ a konvexní v $(-1,0)$ a $(1,+\infty)$, v $x=0$ je tedy inflexe, $f'(0)=0$! (tedy tečna v $[0,0]$ je osa x)

5) asymptoty: „svislé" : $x=1$, $x=-1$

a je „naděje" na šikmé asymptoty v $\pm\infty$, neboť $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$, a při výpočtu limit v $\pm\infty$ jsme „viděli", že $f(x) \sim x$ pro $x \to \pm\infty$;

tedy „hledáme" přímku o rovnici $y = ax+b$, kde

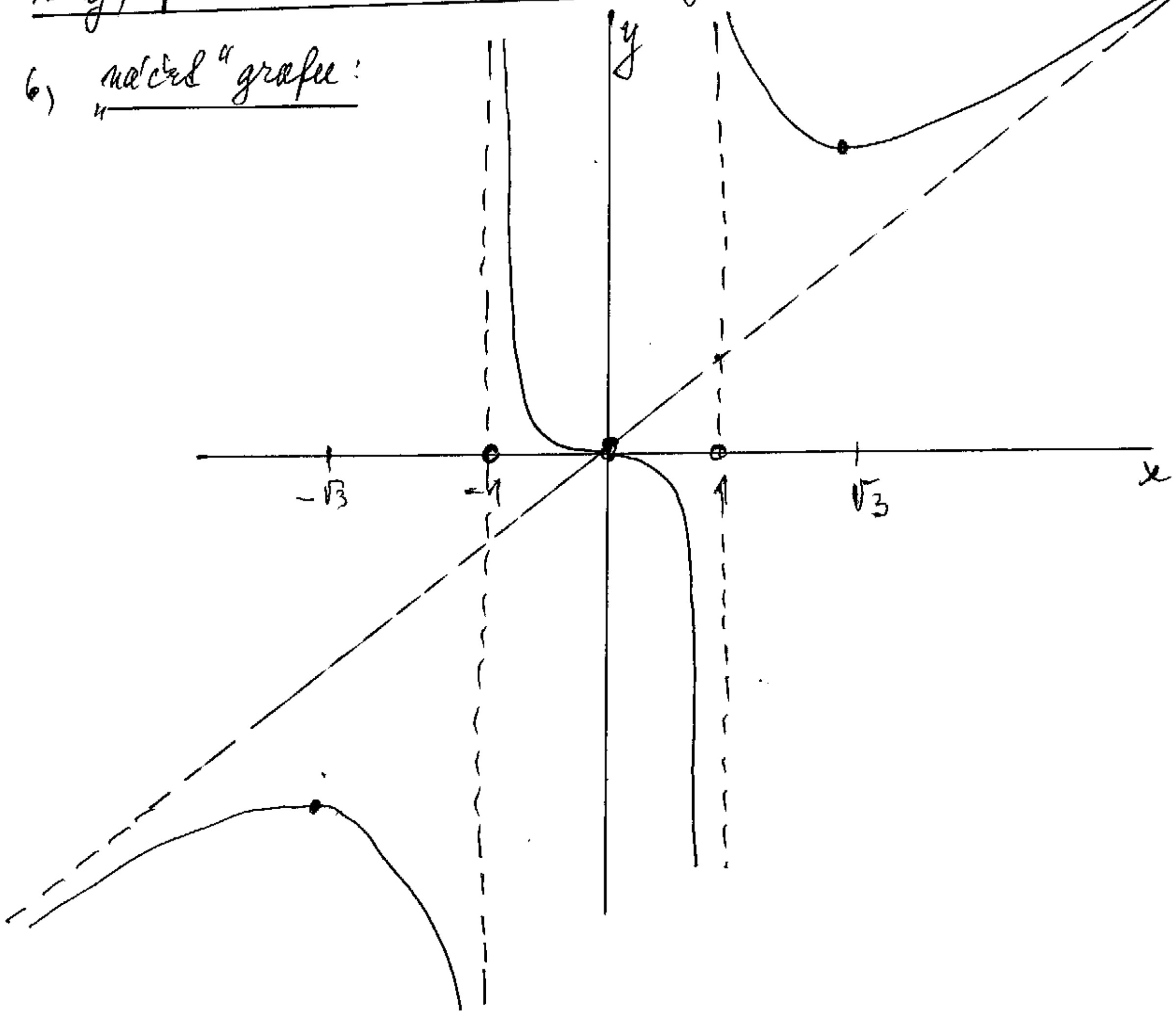
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax) \; ;$$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \overset{=}{\text{AL}} 1 \, ,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

tedy, f má v $\pm\infty$ asymptotu $y = x$;

6) „náčrt" grafu:



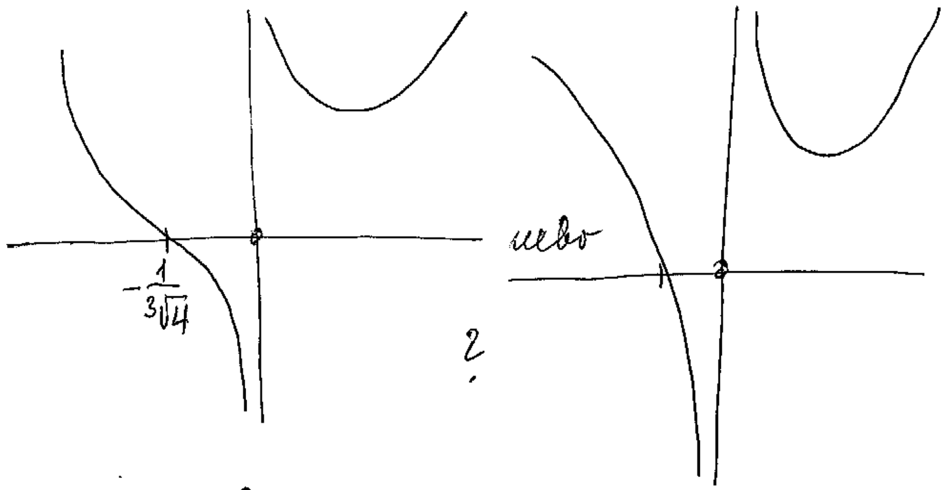
(3) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$ $\left(= \frac{1+4x^3}{x} \right)$ (průběh funkce)

1) $\mathcal{D}f = \{ x \in \mathbb{R};\ x \neq 0 \} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; f je spojitá v $\mathcal{D}f$;
$f(x) = 0 \iff x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $f(x) > 0$ pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \cup (0, +\infty)$,
$f(x) < 0$ v $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$;

2) limity: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right) = „0 + \infty" \underset{AL}{=} +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0\pm} \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right) = „\frac{1}{0\pm} + 0" = \pm\infty$

Odhad grafu:



3) vyšetření monotonie, extrémů:

$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right)' = -\frac{1}{x^2} + 8x = \frac{8x^3 - 1}{x^2}$, $x \in \mathcal{D}f$;

$f'(x) = 0 \iff 8x^3 = 1 \iff x^3 = \frac{1}{8} \iff x = \frac{1}{2}$

f'	$-$	0	$-$	$\frac{1}{2}$	$+$
	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

, tj. f klesá v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{1}{2}\rangle$,
roste v intervalu $\langle 1, +\infty)$;

a odtud: v bodě $x = \frac{1}{2}$ má f ostré lokální minimum,
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$;
globální extrémy f nemá (limity jsou $+\infty$ i $-\infty$)

4) vyšetření, kde je f konvexní, resp. konkávní, a existují-li body inflexní:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + 8x\right)' = \frac{2}{x^3} + 8 = \frac{2(1+4x^3)}{x^3} \;;$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \quad (\text{tj. bod, kde } f(x) = 0 \text{ také})$$

f'	$+$		$-$		$+$
	$\cup$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$		0	$\cup$

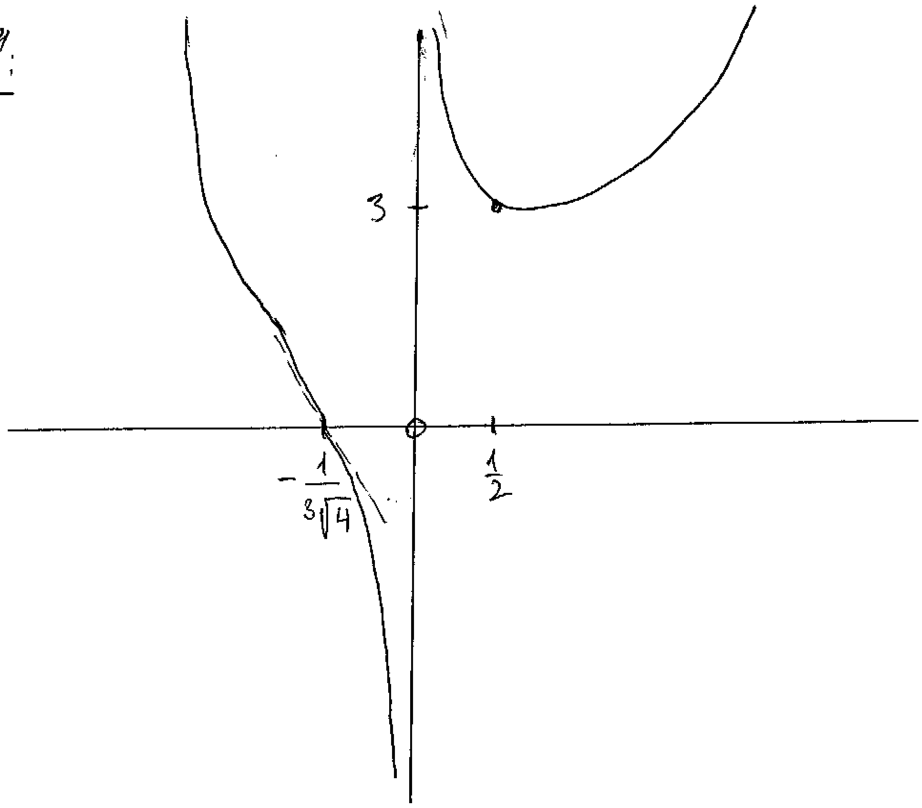
v intervalech $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ a $(0, +\infty)$ je f konvexní, v intervalu $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$ je f konkávní, tedy v bodě $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ má f inflexi. $\left(f'\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \cong -1{,}2\right.$

5) asymptoty grafu:

1) osa y je svislá asymptota;

2) šikmé asymptoty v $\pm\infty$ funkce nemá, neboť $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 4x\right) = \pm\infty$;

6) „náčrtek grafu":



④ $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ (průběh funkce)

1) $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; f je spojitá v D_f; $f(x) \geq 0$ v D_f,
$f(x) = 0 \iff x = -1$, tedy zde má f své globální minimum;

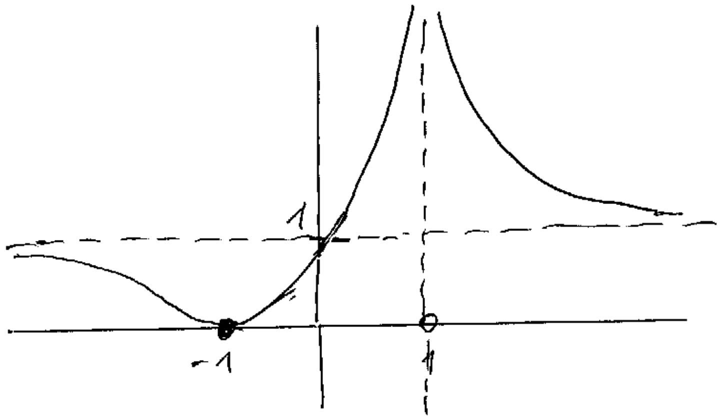
2) <u>limity:</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 \underset{AL}{=} 1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \text{"}\frac{4}{0^+}\text{"} = +\infty$$

$f(0) = 1$

<u>odhad grafu:</u>



3) <u>vyšetření monotonie, extrémy:</u>

$$f'(x) = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = 2\,\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ (stac. bod – podezřelý z extrému, ale už víme, že je zde glob. minimum)

f': $-$		$+$		$-$
$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

Tj. f je klesající v $(-\infty, -1\rangle$ a v $(1, +\infty)$,
f je rostoucí v $\langle -1, +\infty)$

4) vyšetření, „kde" je f konvexní, resp. konkávní; inflexní body:

$$f''(x) = -4\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' = -4\,\frac{(x-1)^{\cancel{3}} - (x+1)\cdot 3\,\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= -4\,\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = 8\,\frac{x+2}{(x-1)^4}\ ;$$

$f''(x)=0 \iff x=-2$ – „podezření" na inflexi, z náčrtku (odhadu) grafu „vidíme", že zde inflexní bod být „musí"!:

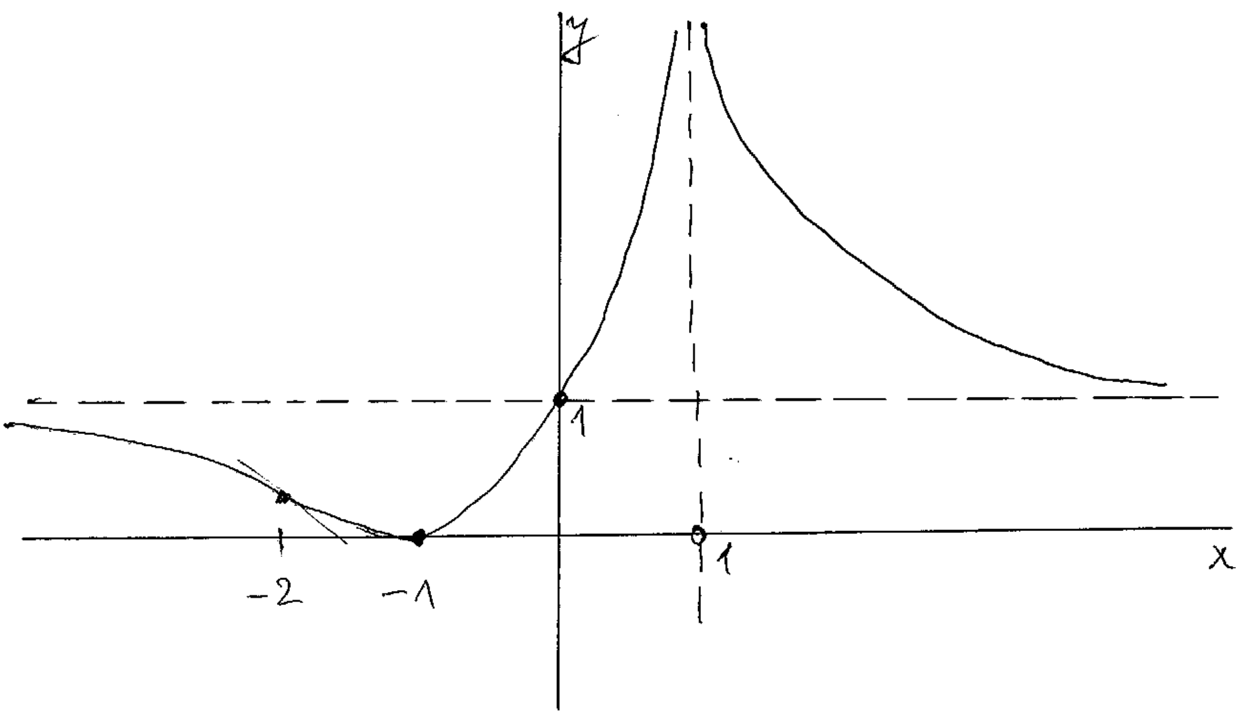
f''	$-$		$+$		$+$
	$\cap$	-2	$\cup$	1	$\cup$

, tedy f je konkávní v $(-\infty,-2)$, konvexní v $(-2,1)$ i v $(1,+\infty)$, tedy v $x=-2$ je inflexe;

$f(-2) = \frac{1}{9}$, $f'(-2) = -\frac{4}{27}$

5) graf (náčrtek) a asymptoty: svislá asymptota: $x = 1$

vodorovná –"– : $y = 1$



2. Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x)=\sqrt{1+\sin(4x)}$ v bodě $a=0$:

a) $$T_2^{a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

(v obecném bodě a, funkce f)

zde $a=0$: tj.

$$T_2(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}.x^2$$

a je-li $f(x)=\sqrt{1+\sin(4x)}$; je definována v okolí bodu $a=0$, stejně tak i $f'(x)$ a $f''(x)$ – „spočítáme" tedy $f(0), f'(0), f''(0)$:

$$f(0) = \sqrt{1+\sin 0} = \underline{1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(4x)+1}}.\cos(4x).4 \Big|_{x=0} = \underline{2}$$

$$f''(0) = 2\left(\frac{\cos(4x)}{\sqrt{1+\sin(4x)}}\right)'\Bigg|_{x=0} = 2\,\frac{-4\sin(4x)\cdot\sqrt{1+\sin 4x} - \frac{\cos 4x\cdot\cos 4x\cdot 2}{\sqrt{1+\sin 4x}}}{(1+\sin 4x)}\Bigg|_{x=0} =$$

$= \underline{-4}$, (omlouvám se, že jsem f'' špatně rozdělila, „nevešla" se, ale snad se dá přečíst)

tedy, máme: $\underline{T_2(x) = 1 + 2x - 2x^2}$

b) a „pokus": $f(0{,}2) \cong 1 + 2.0{,}2 - 2.0{,}04 = 1{,}4 - 0{,}08 = 1{,}32$ –
– kalkulačka $\approx 1{,}3104\ldots$

$f(0{,}02) \cong 1 + 2.0{,}02 - 2.0{,}0004 = 1{,}04 - 0{,}0008 = 1{,}0392$
kalkulačka $\approx 1{,}03918944\ldots$

3) <u>Definice spojitosti funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$:</u>

a) Nechť je funkce f definovaná v okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a.
Pak f je spojitá v bodě $\underline{a}$ (nebo se říká „říkáme, že funkce f je spojitá v bodě $\underline{a}$"), když platí:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(tj. existuje limita funkce f v bodě $\underline{a}$ a tato limita je rovna funkční hodnotě f v bodě $\underline{a}$)

b) <u>$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, lze dodefinovat f spojitě v bodě $a=0$?</u>

(iii) funkci dle definice budeme moci spojitě dodefinovat v $a=0$, když bude existovat vlastní $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = L \in \mathbb{R}$, pak „dodefinujeme-li" $f(0)=L$, splníme „definici spojitosti" funkce f v bodě $a=0$;

tedy: $$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{VLSF}{=} \lim_{t \to -\infty} e^{t} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = „-\frac{1}{0+}" = -\infty,$$

tedy lze f spojitě dodefinovat v bodě $a=0$:

$$\underline{f(0) = 0}$$

(i) ještě rychleji: <u>$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$:</u>

$$\lim_{x \to 0\pm} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{t \to \pm\infty} \operatorname{arctg}(t) = \pm\frac{\pi}{2},$$ tedy

funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu v bodě $x=0$, tedy tuto funkci <u>nelze v $a=0$ spojitě dodefinovat</u>;

(ii) $f(x) = \dfrac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$ pro $x \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{x^2} = „\frac{0}{0}“ \overset{=}{l'H.}$$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4x^2+1}\cdot 8x}{2x} = \lim_{x\to 0} 4\cdot\frac{1}{4x^2+1} \overset{=}{AL} 4,$$

tedy, když „položíme“ $f(0)=4$ (tedy definujeme hodnotu $f(0)=4$), funkci $f(x)$ jsme dodefinovali spojitě.